

# Determinación de la energía y el ancho de resonancias por el método de dos potenciales

*Autor:* Manuel Moyano      *Profesor a cargo:* Dr. Rodolfo M. Id Betan

1 de Marzo 2020 - 28 de Febrero 2021

# Índice general

<b>1. Resonancias del oscilador armónico amortiguado</b>	<b>2</b>
1.1. Matriz-S . . . . .	2
1.2. Oscilador armónico amortiguado . . . . .	2
<b>2. Determinación de la energía y ancho de resonancia por el método de dos potenciales</b>	<b>6</b>
2.1. Método de dos Potenciales . . . . .	6
2.1.1. Formalismo . . . . .	6
2.1.2. Límite cuasi-clásico . . . . .	9
2.2. Aplicaciones . . . . .	9
2.2.1. Pozo de potencial cuadrado en el límite cuasi-clásico unidimensional .	9
2.2.2. Potencial de Woods-Saxon más potencial de Coulomb . . . . .	10
2.2.3. Modelo estándar de decaimiento alfa . . . . .	15
<b>3. Conclusiones</b>	<b>18</b>
<b>4. Anexo</b>	<b>19</b>
4.1. Función G . . . . .	19
4.2. Potencial de Woods-Saxon más Coulombiano, Gráfico interactivo . . . . .	19
4.3. Ancho de decaimiento $\Gamma$ . . . . .	19
4.4. Soluciones para pozos de potencial cuadrados . . . . .	20

# Capítulo 1

## Resonancias del oscilador armónico amortiguado

### 1.1. Matriz-S

Las relaciones de dispersión son usadas en muchas áreas de la física, pero la mayoría de sus aplicaciones son vistas en el dominio de la física de altas energías, en conexión con partículas fuertemente interactuantes.

La idea básica es que la interacción puede ser descrita en términos del comportamiento de las partículas cuando están muy apartadas entre sí, donde la interacción no tiene efecto. En general las interacciones son observadas en la colisión de partículas. Consideramos tres fases: Una *fase inicial* donde las partículas se mueven una hacia la otra, pero la distancia entre ellas es aún demasiado grande y la interacción entre ellas es despreciable; una *fase intermedia* donde las partículas están cerca entre sí e interactúan, y una *fase final* donde las partículas salientes resultantes de la colisión se alejan entre sí estando ya fuera del dominio de interacción, por lo que se las considera no interactuantes. Las fases inicial y final corresponden a límites asintóticos en el pasado y futuro remoto, respectivamente, y pueden ser descritos en términos de partículas libres.

El operador que transforma el estado inicial en el estado final es llamado Matriz-S (matriz de scattering o dispersión):

$$\text{estado inicial} \xrightarrow{\text{Matriz-S}} \text{estado final} \quad (1.1)$$

Se encuentra que la función-S (elemento de la matriz-S para una dada onda parcial) está esencialmente determinada por sus polos en el plano complejo de momentos. En lo que sigue se estudian los polos de la función-S para un sistema clásico simple, a modo de introducción.

### 1.2. Oscilador armónico amortiguado

Consideremos la ecuación de movimiento de un oscilador armónico amortiguado para una partícula de masa  $m$  afectada por una fuerza externa  $f(t)$ :

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + w_0x = F(t)/m = f(t) \quad (1.2)$$

donde  $w_0$  es la frecuencia natural y  $\gamma$  es la constante de amortiguamiento del sistema ( $\gamma > 0$ ).

Si  $f(t) = 0$  (oscilación libre), la solución general de eq.(1.2) toma la forma

$$x_0(t) = ae^{-iw_1t} + be^{-iw_2t} \quad (1.3)$$

$$= [ae^{-i(w_0^2 - \gamma^2)^{1/2}t} + be^{i(w_0^2 - \gamma^2)^{1/2}t}]e^{-\gamma t} \quad (1.4)$$

donde

$$w_{1,2} = \pm(w_0^2 - \gamma^2)^{1/2} - i\gamma \quad (1.5)$$

con lo cual definimos el *tiempo de vida media*  $1/\gamma$ . Esta solución tiene forma de oscilaciones que decaen en forma exponencial como se muestra en (Fig. 1.1).

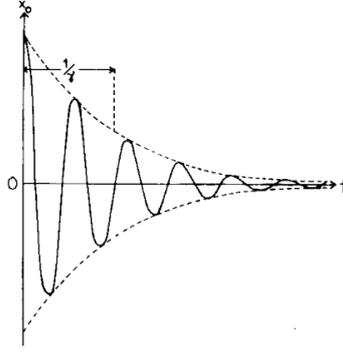


Figura 1.1: Oscilaciones libres de un oscilador armónico amortiguado.[1]

Consideramos ahora el caso de la presencia una fuerza armónica externa,

$$f(t) = F_w e^{-iwt} \quad (1.6)$$

de la cuál resultará la solución estacionaria

$$x(t) = X_w e^{-iwt} \quad (1.7)$$

donde

$$X_w = -\frac{F_w}{w^2 + 2i\gamma w - w_0^2} = -\frac{F_w}{(w - w_1)(w - w_2)} = G(w)F_w \quad (1.8)$$

$$G(w) = -\frac{1}{(w - w_1)(w - w_2)}. \quad (1.9)$$

Nos interesan las propiedades de la función  $G(w)$  dado que se asemejan a las de la Matriz-S de la teoría cuántica de dispersión. Nos proponemos entonces a estudiar sus polos.

Para un amortiguamiento débil ( $\gamma \ll w_0$ ) lo que se encuentra es que  $|G(w)|^2$  posee dos picos de resonancia bien localizados en  $w = w_1$  y  $w = w_2$  de ancho medio  $2\gamma$ . En estas regiones la fase de  $G(w)$  varía rápidamente en una cantidad  $\pi$ .

Para el caso límite en que no hay amortiguamiento, teniendo en cuenta (1.5) y pensando en  $\gamma$  tendiendo a cero,

$$\gamma \rightarrow 0 \Rightarrow \begin{cases} w_1 = w_0 \\ w_2 = -w_0 \end{cases} \Rightarrow G(w) = -\frac{1}{(w - w_0)(w + w_0)} \quad (1.10)$$

Por lo tanto cuando  $\gamma$  es pequeño,  $G(w)$  tiene dos polos simples, y cuanto más se acerque  $\lambda$  a cero, las frecuencias de resonancia más se acercaran al valor de la frecuencia natural.

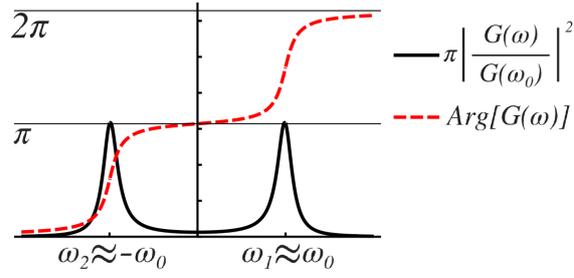


Figura 1.2: Polos normalizados y variación del argumento de  $G(w)$  con  $\gamma = 0,1w_0$ .

Si pensamos en el caso límite contrario correspondiente a un amortiguamiento muy fuerte,

$$\gamma \rightarrow w_0 \Rightarrow w_1 = w_2 = -i\omega_0 \Rightarrow G(w) = -\frac{1}{|\omega - (-i\omega_0)|^2} \quad (1.11)$$

Lo cual indica la existencia de un único polo de orden 2 ubicado en  $w = -i\omega_0$  cuando  $\gamma \rightarrow w_0$ .

Esto nos dice que cuando  $\gamma$  es apreciable, el movimiento de los dos polos será el de unirse en un único polo de orden 2 en el punto medio que existe entre ellos, en tanto que  $\gamma$  se acerca a  $w_0$  en el intervalo  $(0, w_0)$ . En sistemas donde el valor de  $\gamma$  es muy grande será difícil definir los picos de resonancia. Además de esto, en la Fig.(1.3) se puede apreciar que en el caso de  $\gamma$  apreciable el argumento de  $G(w)$  seguirá variando en  $2\pi$ , pero a lo largo de una curva menos abrupta.

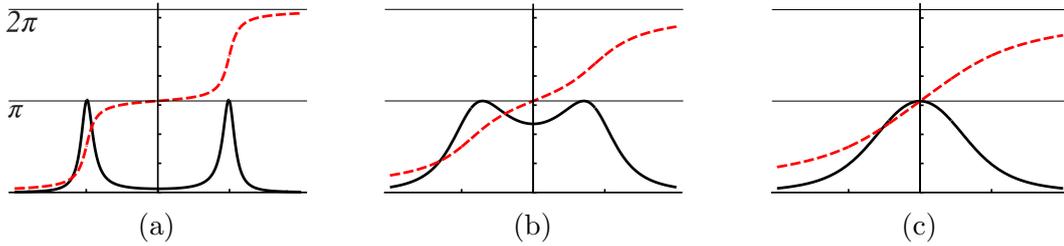


Figura 1.3: Polos normalizados y variación del argumento de  $G(w)$ . (a), (b) y (c) corresponden a los casos de  $\gamma = 0,1w_0$ ,  $\gamma = 0,5w_0$  y  $\gamma = 0,9w_0$  respectivamente.

Por otro lado, no solo la posición de los polos es importante, sino en la forma de las campanas: cuando  $\gamma \ll w_0$ , éstas son aproximadamente simétricas respecto a la vertical que define su pico; cuando  $\gamma$  tiene un valor apreciable respecto a  $w_0$ , las campanas abandonan la simetría como se puede apreciar en Fig.(1.4).

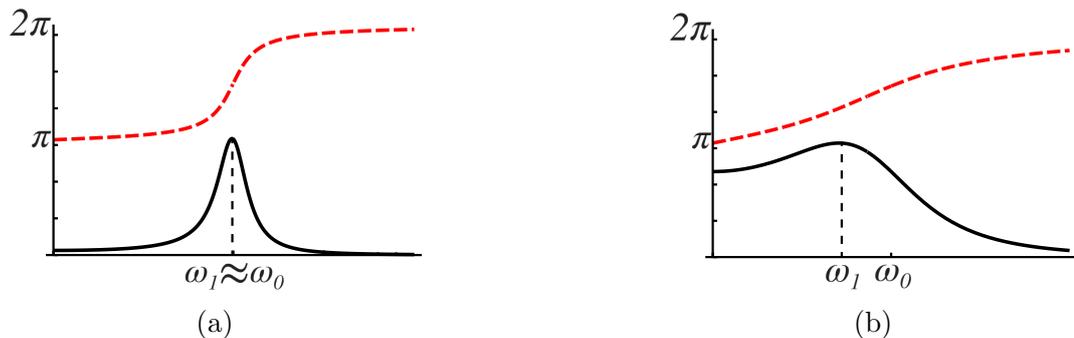


Figura 1.4: (a) y (b) corresponden a  $\gamma = 0,1w_0$  y  $\gamma = 0,5w_0$  respectivamente. Se puede ver que para el caso (b) las pendientes a cada lado de la recta punteada son muy diferentes.

Para generar las gráficas (las cuales se pueden modificar de forma continua en función de  $\gamma$ ) se implemento un código de Wolfram Mathematica el cual se puede ver en el Anexo (4.1).

# Capítulo 2

## Determinación de la energía y ancho de resonancia por el método de dos potenciales

### 2.1. Método de dos Potenciales

#### 2.1.1. Formalismo

Los estados metaestables surgen como resonancias en procesos donde una onda libre que viene desde el infinito se encuentra con un potencial que la distorsiona y eventualmente la atrapa en un estado cuasi-ligado por una cantidad de tiempo apreciable, y luego decae. El método de dos potenciales es útil para encontrar expresiones algebraicas simples para el ancho del decaimiento y el cambio de energía generado por un potencial de cualquier forma.

Sea un potencial  $V(r)$  como el de la Figura (2.1-a) y una energía  $E < V(R) = V_0$  muy cercana a  $E_0$  para el estado cuasi-estacionario. Lo que podemos hacer es expresar  $V(x)$  como la suma de otros dos potenciales:

$$V(r) = U(r) + W(r) \quad (2.1)$$

donde

$$U(r) = \begin{cases} V(r), & r \leq R \\ V_0, & r > R \end{cases}, \quad W(r) = \begin{cases} 0, & r \leq R \\ V(r) - V_0, & r > R \end{cases} \quad (2.2)$$

Por utilidad también definimos un potencial  $\widetilde{W}(r) = W(r) + V_0$ . Consideremos el Hamiltoniano  $H_0 = \nabla^2/2m + U(r)$  con autoestado  $|\Phi_0\rangle$  y autovalor  $E_0$ .  $|\Phi_0\rangle$  es el estado ligado no perturbado, y la perturbación  $W(r)$  lo transforma en un estado cuasi-estacionario. Si en  $t = 0$  encendemos el potencial  $W(r)$ , entonces el Hamiltoniano total pasa a ser:

$$H = H_0 + W(r) \quad (2.3)$$

$|\Phi_0\rangle$  no es autoestado de eq.(2.3), pero sí lo es el paquete de ondas  $\Psi_0(r, t)$  que podemos expandir como

$$\Psi_0(r, t) = b_0(t)e^{-iE_0t/\hbar}\Phi_0(r) + \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty b_k(t)e^{-iE_k t/\hbar}\Phi_k(r)d^3k \quad (2.4)$$

donde la función de onda de estado ligado  $\Phi_0$  y las funciones de dispersión  $\Phi_k$  son autoestados de  $H_0$  (por simplicidad consideramos que  $H_0$  posee un único estado ligado). Aquí,

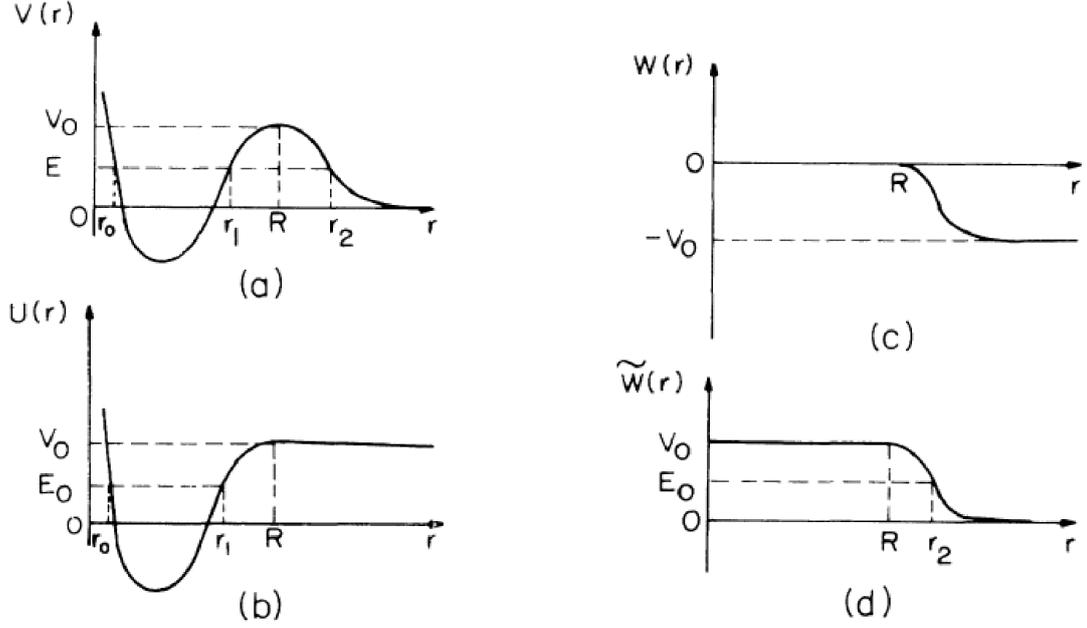


Figura 2.1: En la figura (a) se muestra el potencial de estudio. Los potenciales  $U(r)$  y  $W(r)$  son los utilizados para descomponer a  $V(r) = U(r) + W(r)$ . El potencial  $\widetilde{W}(r) = W(r) + V_0$  es una función de soporte acotado que se define como herramienta para evitar divergencias en los cálculos. Figuras tomadas de [1].

$$E_k = V_0 + \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (2.5)$$

donde  $m$  es la masa de la partícula.

La ecuación (2.4) se suplementa con las condiciones iniciales  $b_0(0) = 1$ ,  $b_k(0) = 0$ . Insertando la ec.(2.4) en la ecuación de Schrödinger obtenemos las ecuaciones estándar de la teoría de perturbaciones dependientes del tiempo,

$$i\hbar \frac{db_0(t)}{dt} = b_0(t) \langle \Phi_0 | W | \Phi_0 \rangle + \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} b_k(t) e^{i(E_0 - E_k)t/\hbar} \langle \Phi_0 | W | \Phi_k \rangle \quad (2.6a)$$

$$i\hbar \frac{db_k(t)}{dt} = b_0(t) \langle \Phi_k | W | \Phi_0 \rangle e^{i(E_k - E_0)t/\hbar} + \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} b_{k'}(t) e^{i(E_k - E_{k'})t/\hbar} \times \langle \Phi_k | W | \Phi_{k'} \rangle \quad (2.6b)$$

La probabilidad de encontrar el sistema en el estado inicial  $|b_0(t)|^2$  decrece en el tiempo. Si para valores altos de  $t$  decae como  $e^{-\Gamma t/2\hbar}$ , entonces tenemos un estado metaestable o de resonancia. Para obtener  $\Gamma$  debemos resolver el sistema de ecuaciones acopladas (2.6), sin embargo un problema que surge de eq.(2.6b) es que existen divergencias en los elementos de matriz  $\langle \Phi_k | W | \Phi_{k'} \rangle$  ya que  $W$  no es una función compacta;  $W(r) \rightarrow -V_0$  para  $r \rightarrow \infty$  [ver Figura (2.1c)]. De hecho, podemos ver que

$$\langle \Phi_k | W | \Phi_{k'} \rangle \sim \int d^3 r e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} (-V_0) e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}} = (2\pi)^3 (-V_0) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (2.7)$$

Para resolver esto utilizamos el potencial  $\widetilde{W}(r) = W(r) + V_0$ , el cual se anula para  $r \rightarrow \infty$  [ver Figura(2.1d)]. Podemos escribir

$$\langle \Phi_k | W | \Phi_{k'} \rangle = \langle \Phi_k | \widetilde{W} | \Phi_{k'} \rangle - (2\pi)^3 V_0 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (2.8)$$

Sustituyendo (2.8) en eq.(2.6b) y definiendo  $b_k(t) = e^{iV_0t/\hbar}\tilde{b}_k(t)$ , obtenemos

$$i\hbar\frac{d\tilde{b}_k(t)}{dt} = b_0(t)\langle\Phi_k|W|\Phi_0\rangle e^{i(E_k-V_0-E_0)t/\hbar} + \int\frac{d^3k'}{(2\pi)^3}\tilde{b}_{k'}(t)e^{i(E_k-E_{k'})t/\hbar}\times\langle\Phi_k|\widetilde{W}|\Phi_{k'}\rangle\quad(2.9)$$

Podemos notar que si despreciamos los elementos de matriz  $\langle\Phi_k|\widetilde{W}|\Phi_{k'}\rangle$  (los cuales ya no poseen divergencias) se obtiene la regla dorada de Fermi (ver [2]) para  $\Gamma$ , el ancho de estado metastable,

$$\Gamma = 2\pi\int|\langle\Phi_0|W|\Phi_k\rangle|^2\rho(E_k)\delta(E_0+V_0-E_k)dE_k\quad(2.10)$$

donde  $\rho(E_k)$  es la densidad de estados finales y  $E_k = V_0 + \hbar^2k^2/2m$ . Se sigue de la función  $\delta$  de Dirac que la energía del estado inicial  $E_0$  es igual a la energía *cinética*  $\hbar^2k^2/2m$ . Debemos notar también que si los elementos de matriz  $\langle\Phi_k|W|\Phi_{k'}\rangle$  se desprecian en la ecuación (2.6b), es decir, antes de la renormalización, uno obtiene la regla dorada de Fermi con una función  $\delta$  errónea

$$\delta(E_0-E_k) = \delta\left(E_0-V_0-\frac{\hbar^2k^2}{2m}\right),\quad(2.11)$$

donde, considerando la condición  $E_0 < V_0$ , vemos que el argumento de  $\delta$  nunca se anula y la función implicaría  $\Gamma = 0$  para todo  $E_0$ .

El desarrollo matemático para encontrar  $\Gamma$  es extenso y puede ser encontrado en [3]. Aquí nos limitaremos a nombrar los pasos esenciales. Si realizamos una transformación de Laplace  $b_0(t) \rightarrow b_0(\epsilon)$ , se ve que si  $b_0(\epsilon)$  tiene un polo en  $\epsilon = \epsilon_0$ , entonces  $b_0(t)$  decae exponencialmente en el tiempo como buscamos y  $\epsilon_0 = \Delta - i\Gamma/2$ , donde  $\Delta$  es el corrimiento de la energía del estado cuasi-estacionario. Esto es, la energía del sistema perturbado será compleja,

$$E = E_0 + \epsilon_0 = (E_0 + \Delta) - \frac{i}{2}\Gamma\quad(2.12)$$

Si  $\phi_0(r)$  es la función de onda radial de la expansión en ondas parciales, y si  $\chi_k(r)$  y  $\chi_k^{(+)}(r)$  son los estados regular en el origen e irregular (saliente) del Hamiltoniano  $H_0$ , respectivamente, entonces podemos calcular los valores de  $\Delta$  y  $\Gamma$  mediante:

$$\Delta = -\frac{\hbar^2\alpha}{mk}|\phi_0(R)|^2[2\alpha\chi_k(R)\tilde{\chi}_k(R) - k]\quad(2.13a)$$

$$\Gamma = \frac{4\hbar^2\alpha^2}{mk}|\phi_0(R)\chi_k(R)|^2\quad(2.13b)$$

donde  $\tilde{\chi}_k(r) = Re[\chi_k^{(+)}(r)]$  y  $\alpha = \sqrt{2m(V_0 - E_0)}/\hbar$ ,  $\Delta$  es la corrección de la energía  $E_0$ , esto es,  $(E_0 + \Delta)$  da la energía del estado cuasi-estacionario, y  $\Gamma$  es el ancho del estado cuasi-estacionario, el cual está relacionado al tiempo de vida media  $T_{\frac{1}{2}}$  dado por,

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\hbar\ln(2)}{\Gamma}\quad(2.14)$$

## 2.1.2. Límite cuasi-clásico

Las ecuaciones (2.13a) y (2.13b) dan la corrección a la energía y al ancho de la resonancia, respectivamente, en función de las funciones de onda de la solución del sistema descrito por  $H_0$ . En esta sección vamos a dar expresiones que solo dependen de los parámetros del potencial.

En el límite cuasi-clásico podemos expresar  $\phi_0(r)$ ,  $\chi_k(r)$  y  $\tilde{\chi}_k(r)$  como

$$\chi_k(r) = \frac{\sqrt{k}}{2\sqrt{|p(r)|}} \exp\left(-\int_r^{r_2} |p(r')| dr'\right) \quad (2.15a)$$

$$\tilde{\chi}_k(r) = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{|p(r)|}} \exp\left(-\int_r^{r_2} |p(r')| dr'\right) \quad (2.15b)$$

$$\phi_0(r) = \frac{\sqrt{N}}{2\sqrt{|p(r)|}} \exp\left(-\int_{r_1}^r |p(r')| dr'\right) \quad (2.15c)$$

donde  $N$  es el factor de normalización cuasi-clásico dado por

$$N = \left[ \int_{r_0}^{r_1} \frac{1}{p(r)} \cos^2\left(\int_{r_0}^r p(r') dr' - \frac{\pi}{4}\right) dr \right]^{-1} \quad (2.16)$$

y

$$p(r) = \sqrt{2m(E_0 - V(r))}/\hbar \quad (2.17)$$

Introduciendo estas expresiones en ecs.(2.13) obtenemos el cambio de fase y ancho de decaimiento en el límite cuasi-clásico:

$$\Delta = \frac{NV'(R)}{16\alpha^3} \exp\left(-2 \int_{r_1}^R |p(r)| dr\right), \quad (2.18a)$$

$$\Gamma = \frac{\hbar^2 N}{4m} \exp\left(-2 \int_{r_1}^{r_2} |p(r)| dr\right), \quad (2.18b)$$

donde  $V'$  es la derivada del potencial  $V(r)$  respecto a  $r$  y la constante  $\alpha$  es igual a como lo fue en la sección anterior, esto es,  $\alpha = \sqrt{2m(V_0 - E_0)}/\hbar$ .

Una de las limitaciones de trabajar en la aproximación cuasi-clásica es la presencia del factor  $V'(R)$  en ec.(2.18a) el cual será nulo cuando la partición del potencial se realice sobre el punto máximo de la barrera, resultando en un corrimiento nulo de la parte real de la energía del estado estacionario.

## 2.2. Aplicaciones

### 2.2.1. Pozo de potencial cuadrado en el límite cuasi-clásico unidimensional

Como primera instancia de análisis consideramos un potencial  $V(r)$  que es una versión simplificada, constante a trozos, del potencial  $V(r)$  estudiado en la Sección (1.2.1):

$$V(r) = \begin{cases} \infty, & r < 0 \\ V_1, & 0 \leq r < r_1 \\ V_2, & r_1 \leq r < r_2 \\ 0, & r_2 \leq r \end{cases} \quad (2.19)$$

con  $0 < V_2$  y  $V_1 < 0$  [ver Figura (2.2)].

Definimos además, por analogía,  $R = r_1 + (r_2 - r_1)/2$ . El interés es obtener expresiones para el cambio de energía y ancho de decaimiento en el límite cuasi-clásico. Primero es necesario calcular el coeficiente de normalización  $N$  dado por eq.(2.16), para lo cual es útil notar que en el intervalo  $(0, r_1)$  tenemos  $p(r) = [2m(E_0 - V_1)]^{1/2}/\hbar$  constante. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} N^{-1} &= \int_0^{r_1} \frac{\hbar}{\sqrt{2m(E_0 - V_1)}} \cos^2 \left[ \int_0^r \sqrt{2m(E_0 - V_1)}/\hbar dr' - \frac{\pi}{4} \right] dr \\ &= \frac{\hbar}{\sqrt{2m(E_0 - V_1)}} \int_0^{r_1} \cos^2 \left[ \sqrt{2m(E_0 - V_1)}r/\hbar - \frac{\pi}{4} \right] dr \end{aligned}$$

Cambiando la variable  $r$  por  $u = \sqrt{2m(E_0 - V_1)}r/\hbar - \pi/4$ ,

$$N^{-1} = \frac{\hbar^2}{2m(E_0 - V_1)} \int_{-\pi/4}^{u_1} \cos^2 u du$$

donde  $u_1 = \sqrt{2m(E_0 - V_1)}r_1/\hbar - \pi/4$ . Resolviendo la integral, se obtiene

$$N^{-1} = \frac{\hbar^2}{4m(E_0 - V_1)} \left( \cos u_1 \sin u_1 + u_1 - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$$

Tomando el recíproco en ambos miembros,

$$N = \frac{4m}{\hbar^2} \frac{(E_0 - V_1)}{\cos u_1 \sin u_1 + u_1 - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}} \quad (2.20)$$

Ahora, considerando que en el intervalo  $(r_1, r_2)$  tenemos que  $p(r) = \sqrt{2m(V_2 - E_0)}/\hbar$  constante, calculamos el ancho de decaimiento:

$$\Gamma = \frac{\hbar^2 N}{4m} e^{-2\sqrt{2m(V_2 - E_0)}(r_2 - r_1)/\hbar} \quad (2.21)$$

Por otro lado, como  $V'(R) = 0$ , el corrimiento de la energía resulta nulo:

$$\Delta = 0. \quad (2.22)$$

Las expresiones (2.21) y (2.22) dan el ancho y la corrección a la energía de la resonancias, respectivamente, para el caso particular donde el potencial se simula por potenciales constante a trozos.

### 2.2.2. Potencial de Woods-Saxon más potencial de Coulomb

En esta sección nos centraremos en la simulación de una partícula alfa en un potencial conformado por la suma de un potencial de Woods-Saxon  $V_{WS}(r)$  más un potencial de Coulomb  $V_c(r)$ ,

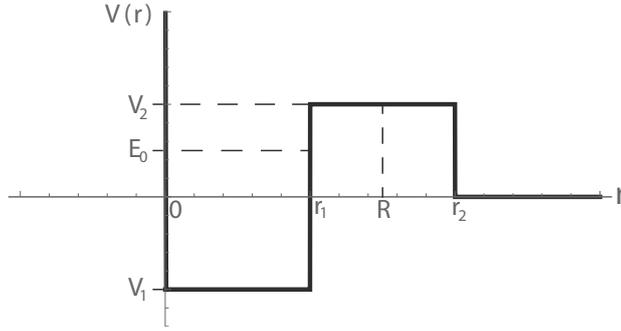


Figura 2.2: Potencial cuadrado dado por la ec.(2.27). Representa una versión simplificada del potencial estudiado en la Sección (2.1.1).

$$V(r) = V_{WS}(r) + V_c(r) \quad (2.23)$$

Ver Fig.(2.3a). Con  $V_c(r)$  el potencial coulombiano de una esfera uniformemente cargada de radio  $R_c$ ,

$$V_c(r) = \begin{cases} 2Z_c e^2 \frac{1}{2R_c} (3 - \frac{r^2}{R_c^2}), & r \leq R_c \\ 2Z_c e^2 \frac{1}{r}, & r > R_c \end{cases} \quad (2.24)$$

y  $V_{WS}(r)$  es el potencial de Woods-Saxon definido por

$$V_{WS}(r) = \frac{-V_0}{1 + e^{\frac{r-R_{WS}}{a}}} \quad (2.25)$$

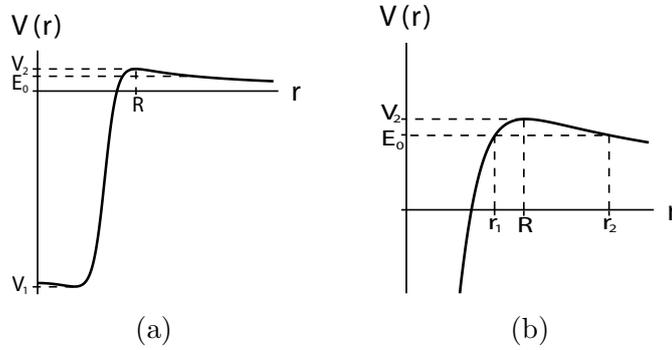


Figura 2.3: En la figura (a) se grafica la ec.(2.23).  $E_0$  es la energía del estado no perturbado,  $V_1$  representa la profundidad del pozo y  $V(r) \rightarrow 0$  cuando  $r \rightarrow \infty$ . La figura (b) es un acercamiento al intervalo donde  $E_0$  interseca la curva del potencial;  $V_2$  es el máximo de la barrera alcanzado en  $r = R$ .

El  $^{212}\text{Po}$  es un arquetipo para el estudio del decaimiento de partículas alfa. Los valores experimentales para la energía de decaimiento alfa<sup>1</sup> y el ancho de decaimiento son  $E_e = 8,817\text{MeV}$  y  $\Gamma_e = 1,53 \cdot 10^{-15}\text{MeV}$ , respectivamente, y el tiempo de vida media  $T_{\frac{1}{2}e} = 0,299\mu\text{sec}$ . Estos son los parámetros de la resonancia que se desean reproducir.

En la aproximación de partícula simple, los parámetros del campo medio son ajustados para reproducir la energía experimental  $E_e = 8,817\text{MeV}$ . Usando el código Gamow[5] los parámetros resultan,

<sup>1</sup>para este valor consideramos la corrección de apantallamiento que es de  $30\text{KeV}$  sobre el valor  $Q = 8,785\text{MeV}$ , esto es, de al rededor del 0,3%.  $Q$  se tiene de [4].

$$R_{WS} = R_c = r_0 A^{1/3} = 1,2 fm \cdot 208^{1/3} = 7,12 fm, \quad (\text{radio nuclear}) \quad (2.26a)$$

$$a = 0,65 fm, \quad (\text{difusión superficial}) \quad (2.26b)$$

$$Z_c = 82, \quad (2.26c)$$

$$e^2 = 1,44 MeV \cdot fm, \quad (2.26d)$$

$$\frac{\hbar^2}{2\mu} = 0,188 MeV \cdot fm^2 \quad (2.26e)$$

$$V_0 = 143,77 MeV \quad (2.26f)$$

donde  $Z_c$  es la carga del  $^{208}\text{Pb}$  y  $\mu$  es la masa reducida del sistema  $^{208}\text{Pb} + \alpha$ .

### Aproximación mediante un potencial constante a trozos

Para ejemplificar la aproximación cuasi-clásica para un potencial constante a trozos, desarrollado en la Sec.(2.2.1), aproximaremos el potencial  $V(r)$  dado por ec.(2.23) por la función

$$V'(r) = \begin{cases} \infty, & r < 0 \\ V_1, & 0 \leq r < r_1 \\ V_2, & r_1 \leq r < r_2 \\ 0, & r_2 \leq r \end{cases} \quad (2.27)$$

donde  $V_1$  y  $V_2$  son el mínimo absoluto y el máximo absoluto de  $V(r)$ , respectivamente, y  $r_1$  y  $r_2$  los puntos donde la línea definida por  $E_0$  interseca la curva  $V(r)$  [ver Fig.(2.3)].

Fijando  $E_0 = E_e$  [no hay error en esta condición dado que se cumple la ec.(2.22)] y usando los parámetros (2.26) resulta  $r_1 = 8,321 fm$ ,  $r_2 = 26,785 fm$ ,  $V_1 = -98,213 MeV$  y  $V_2 = 31,931 MeV$ , los cuales son los valores que definen al potencial (2.27). Luego, según las ecs. (2.21) y (2.14) el ancho de decaimiento y tiempo de vida media resultan, respectivamente,

$$\Gamma = 1,931 \cdot 10^{-25} MeV \quad (2.28a)$$

$$T_{\frac{1}{2}} = 2362 sec \quad (2.28b)$$

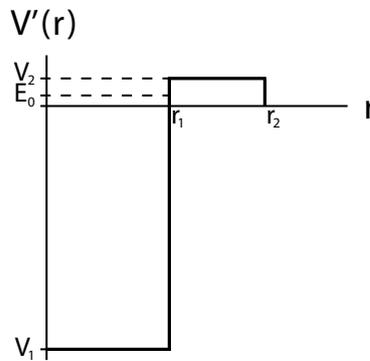


Figura 2.4

Figura 2.5:  $V'(R)$  es el potencial constante a trozos por el cual aproximamos a  $V(r)$ .

Estos valores están muy alejados de los resultados experimentales. Sin embargo, si consideramos la energía  $E_0 = E_e$ , en realidad existen diferentes valores de  $V_0$  para los cuales esta energía está asociada a un estado ligado. Para simplificar el estudio de estos estados ligados, se aproximó el pozo  $U(r)$  por un pozo de potencial cuadrado  $U'(r)$ , con máximo  $V_2$ , profundidad  $V_1$  y radio  $R$  [ver Fig.(2.6a,b)]. Debemos notar que estas tres cantidades dependen de  $V_0$  en  $U'(r)$ , así como los valores  $r_{1,2}$  en la ec.(2.27).

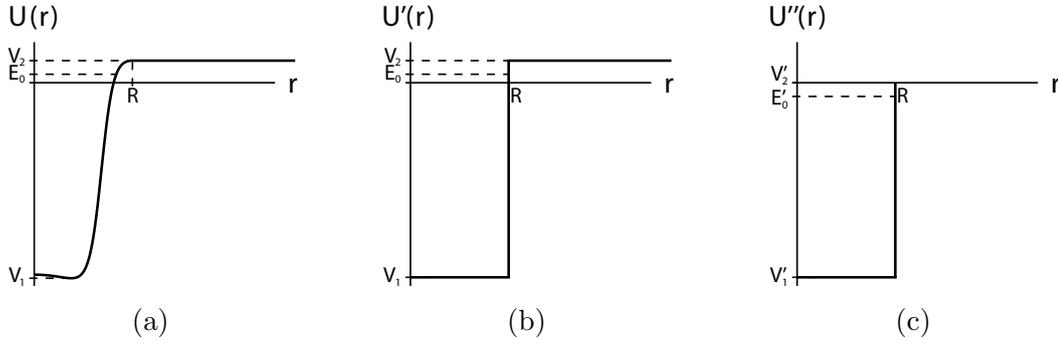


Figura 2.6: En (a) el potencial  $U(r)$  es al cuál está asociado el estado estacionario de energía  $E_0$ . En (b) aproximamos  $U(r)$  por el potencial constante a trozos  $U'(r)$ .

Además, por utilidad, realizamos un corrimiento en el eje  $y$  quedándonos con un nuevo pozo cuadrado  $U''(r)$  [ver Fig.(2.6c)]. Nuestros nuevos parámetros son

$$E'_0 = E_0 - V_2 = E_0 - \max[V(V_0)] \quad (2.29a)$$

$$V'_1 = V_1 - V_2 = \min[V(V_0)] - \max[V(V_0)] \quad (2.29b)$$

donde  $E'_0 < 0$ ,  $V'_1 < 0$  y consideramos al potencial  $V(r)$  definido por ec.(2.23) parametrizado en  $V_0$ , y escribimos  $V(V_0)$  para notar  $V(r, V_0)$ .

De [2] tenemos que las soluciones para los estados ligados impares<sup>2</sup> de este sistema satisfacen:

$$\begin{cases} \left| \sin \left[ \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2} (E'_0 - V'_1) R} \right] \right| = \sqrt{\frac{E'_0 - V'_1}{-V'_1}} \\ \tan \left[ \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2} (E'_0 - V'_1) R} \right] < 0 \end{cases} \quad (2.30)$$

donde  $E'_0 - V'_1 > 0$  y  $V'_1 < 0$ . De ecs.(2.29) tenemos que  $E'_0$  y  $V'_1$  son funciones de  $V_0$ , entonces es posible resolver el sistema (2.30) numéricamente y obtener en forma directa los  $V_0$  buscados [el código se puede ver en el Anexo (4.4)].

Como ejemplo, tomemos  $V_0 = 109,33 \text{ MeV}$ . Ésta es una solución de las ecs.(2.30) y por lo tanto el estado impar con energía  $E_0 = E_e$  es un estado ligado del potencial  $U'(r)$ . Entonces los parámetros de  $V(r)$ , y por lo tanto los de  $V'(r)$ , serán:

$$V_1 = -65,52 \text{ MeV}, \quad V_2 = 22,342 \text{ MeV} \quad (2.31a)$$

$$r_1 = 8,087 \text{ fm}, \quad r_2 = 26,785 \text{ fm} \quad (2.31b)$$

Ahora podemos aplicar la ec.(2.21). Obtenemos

$$\Gamma = 3,1285 \cdot 10^{-26} \text{ MeV} \quad (2.32)$$

<sup>2</sup>Nos interesan sólo las soluciones impares dado que queremos emular un problema tridimensional con momento angular  $l = 0$ .

Se realizó este procedimiento para un conjunto de soluciones de (2.30) [ver Fig.(2.7)]. Lo que se encuentra es que  $\Gamma$  crece monótonamente con  $V_0$ . Sin embargo se ve que para valores razonables de  $V_0$  los resultados para  $\Gamma$  están lejos del valor experimental, lo cual se atribuye a que la aproximación por un potencial del tipo  $V'(r)$  [ec.(2.27)] no es apropiado en este sistema. Anchos de decaimiento en el intervalo de  $(5 \cdot 10^{-26}; 2 \cdot 10^{-25}) MeV$  equivalen a tiempos de vida media  $T_{\frac{1}{2}}$  en el intervalo de  $(9150; 2250) sec$ .

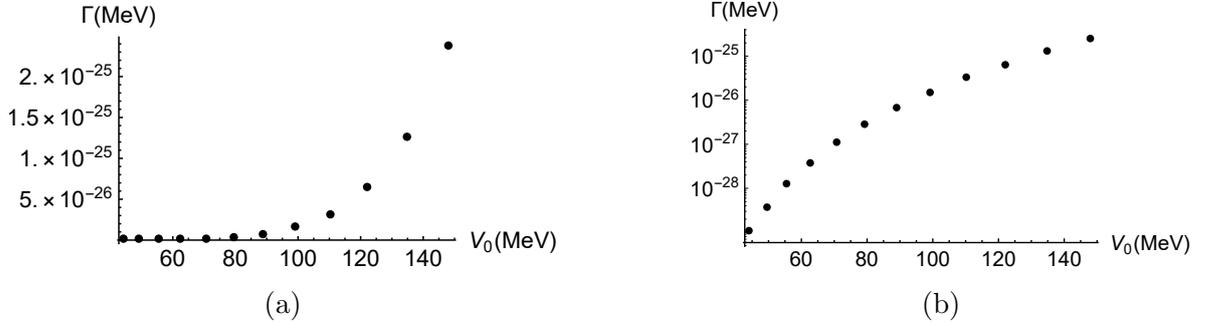


Figura 2.7: (a) Fijando  $E_0$  a su valor experimental  $E_e$ , se muestran los resultados de  $\Gamma$  para diferentes valores de  $V_0$  bajo la aproximación de un potencial constante a trozos. En (b) se muestran los mismos resultados de (a) en escala logarítmica.

Para realizar los cálculos se implementó un código de Wolfram Mathematica el cual se puede ver en el Anexo (4.4).

### Potencial de Woods-Saxon más Coulombiano en el límite cuasi-clásico

En esta sección volveremos a estudiar el problema de una partícula alfa en un potencial  $V(r)$  dado por la suma de un potencial de Woods-Saxon más el potencial de Coulomb [ec.(2.23)] en el límite cuasi-clásico, pero sin realizar aproximaciones en el cálculo de  $\Gamma$ , esto es, usando la ec.(2.18). Consideramos entonces una partición de la forma  $V(r) = U(r) + W(r)$  sobre el punto  $r = R$  [ver Fig.(2.8)].

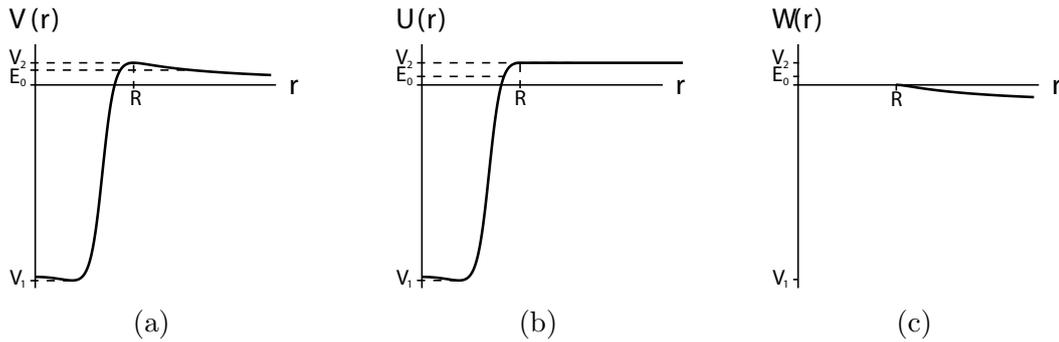


Figura 2.8: En (a) se muestra el potencial  $V(r)$  definido por ec.(2.23). En (b) y (c) se detallan los potenciales  $U(r)$  y  $W(r)$  que sumados componen al potencial  $V(r)$ .

Podemos tomar nuevamente los resultados (2.26) dados por el código Gamow[5]. Con  $V_0 = 143,77 MeV$  fijo podemos observar la dependencia de  $\Gamma$  con  $E_0$  dada por la ec.(2.18), la cual se muestra en escala logarítmica en la Fig.(2.9) donde se trazó con una línea horizontal el valor experimental  $\Gamma_e$ . Se observa que  $\Gamma_e$  se da para valores de  $E_0$  en el intervalo de  $(8,5; 9) MeV$ . En particular para la energía experimental  $E_0 = E_e = 8,817 MeV$  se obtiene como resultado

$$\Gamma = 3,430 \times 10^{-15} MeV \quad (2.33a)$$

$$T_{\frac{1}{2}} = 0,133\mu sec \quad (2.33b)$$

lo cual es razonablemente cercano a los valores experimentales  $\Gamma_e = 1,53 \cdot 10^{-15} MeV$ ,  $T_{\frac{1}{2}e} = 0,299\mu sec$ , y sobretodo en comparación con los resultados obtenidos con la aproximación de  $V(r)$  por un potencial constante a trozos [ec.(2.28)].

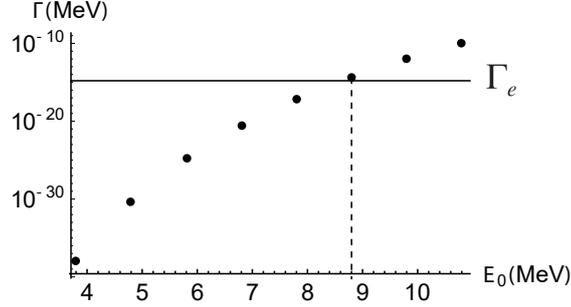


Figura 2.9: Fijando  $V_0 = 143,77 MeV$ , se muestran los resultados de  $\Gamma$  para diferentes valores de  $E_0$  en escala logarítmica.

Ahora, de manera análoga a lo que se desarrolló en la subsección anterior, fijamos el valor  $E_0 = E_e$  y estudiamos como varía  $\Gamma$  [calculado mediante ec.(2.18)] con respecto a diferentes valores de  $V_0$ , siendo estos últimos los que generan que  $E_e$  sea un estado ligado. Nuevamente no hay error en considerar  $E_0 = E_e$  dado que realizamos la partición en un punto donde la derivada del potencial es  $V'(R) = 0$ , y consecuentemente de ec.(2.18) tenemos que  $\Delta = 0$ . Para facilitar los cálculos de  $V_0$  realizaremos la misma simplificación que en la subsección anterior, esto es, tomaremos al pozo de potencial cuadrado  $U'(r)$  en lugar de  $U(r)$  [ver Fig.(2.6)], que tendrá profundidad  $V_1$ , ancho  $R$  y máximo  $V_2$ ; estas tres cantidades dependen de  $V_0$ . Entonces los  $V_0$  deben satisfacer las ecs.(2.30).

Los resultados se muestran en la Fig.(2.10), donde se marcó con una línea horizontal el valor experimental  $\Gamma_e$ . Se observa que para la mayoría de valores de  $V_0$  el orden de magnitud de  $\Gamma$  es apropiado, y que el mejor resultado (más cercano a  $\Gamma_e$ ) se obtiene para  $V_0 = 109,33 MeV$  donde  $\Gamma = 1,341 \cdot 10^{-15} MeV$ . Nuevamente es notable comparar estos resultados con los obtenidos para la aproximación por un potencial constante a trozos en Fig.(2.7), con los cuales existe una diferencia de 10 ordenes de magnitud en  $\Gamma$ .

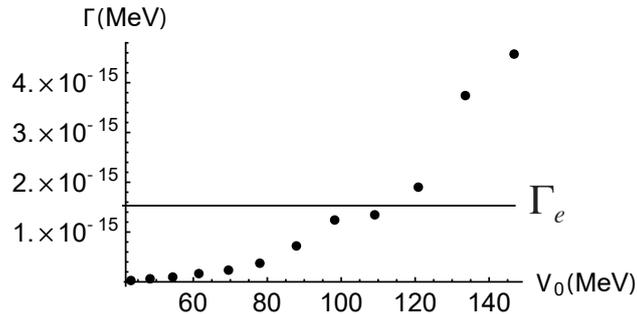


Figura 2.10: Se fija  $E_0 = E_e$  y se muestran los resultados de  $\Gamma$  para diferentes valores de  $V_0$ .

Para realizar los cálculos se implementaron códigos de Wolfram Mathematica los cuales se pueden ver en los Anexos (4.3) y (4.4).

### 2.2.3. Modelo estándar de decaimiento alfa

Un potencial usualmente utilizado en el modelo estándar de decaimiento alfa es el dado por

$$V(r) = \begin{cases} V_1, & r < R \\ \frac{V_2 R}{r}, & r \geq R \end{cases} \quad (2.34)$$

con  $V_1 < 0$  y  $V_2 > 0$  [ver Fig.(2.11a)]. Podemos aplicar sobre  $V(r)$  una partición de la forma  $V(r) = U(r) + W(r)$  sobre el punto  $r = R$  como se muestra en la Figura (2.11b,c). En [3] se puede ver que al trabajar con este potencial en el límite cuasi-clásico y considerando momento angular  $l = 0$  sobre las expresiones (2.13), lo que se obtiene son las siguientes expresiones para el corrimiento en energía y ancho de decaimiento, respectivamente,

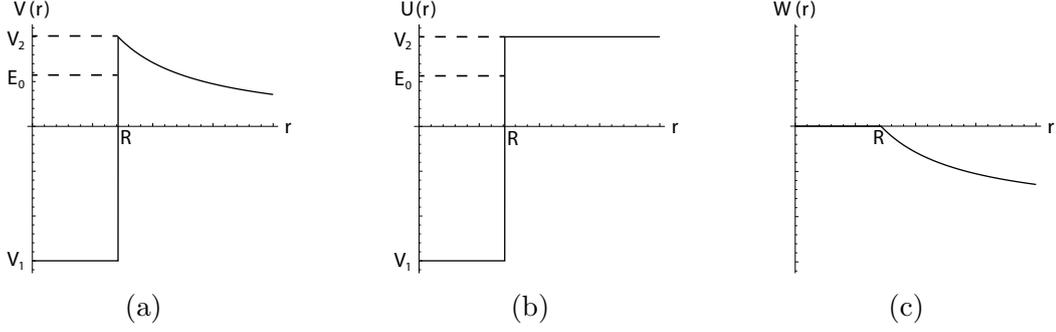


Figura 2.11: En (a) se muestra el potencial  $V(r)$  definido por ec.(2.34). En (b) y (c) se detallan los potenciales  $U(r)$  y  $W(r)$  que sumados componen al potencial  $V(r)$ .

$$\Delta = -\frac{(E_0 - V_1)V_2}{2(1 + \alpha R)(V_2 - V_1)\alpha R} \quad (2.35a)$$

$$\Gamma = \hbar^2 \frac{2\alpha^2(E_0 - V_1)}{(1 + \alpha R)(V_2 - V_1)m} e^{-2S(E_0)} \quad (2.35b)$$

donde  $S(E)$  es la acción cuasi-clásica,

$$S(E) = \int_R^{V_2 R/E_0} \left[ \frac{2m}{\hbar^2} \left( \frac{V_2 R}{r} - E_0 \right) \right]^{1/2} dr \quad (2.36)$$

y  $\alpha = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_2 - E_0)}$ . Uno de los aspectos más importantes de este caso, comparado a los estudiados con anterioridad, es que tenemos  $\Delta \neq 0$ . Por lo tanto, si queremos reproducir la energía experimental  $E_e = 8,817 MeV$ , debemos considerar la ecuación

$$E_e = E_0 + \Delta(E_0, V_1) \quad (2.37)$$

donde  $\Delta(E_0, V_1)$  es la función dada por eq.(2.35a). De eq.(2.37) despejamos la profundidad del pozo  $V_1$  en función de la energía del estado cuasi-estacionario  $E_0$ ,

$$V_1(E_0) = \frac{2(E_0 - E_e)(1 + \alpha R)\alpha R - E_0}{\frac{2}{V_2}(E_0 - E_e)(1 + \alpha R)\alpha R - 1} \quad (2.38)$$

Recordando que  $V_1$  es un número negativo, se puede ver de Fig.(2.12) que para grandes profundidades,  $E_0$  se acerca al valor asintótico  $8,8636 MeV$  el cuál está señalado en línea de puntos, y que en general para cualquier valor de  $V_1$ ,  $E_0$  estará en el intervalo  $[8,83; 8,86) MeV$ . El valor experimental de la energía  $E_e$  está señalado en línea vertical discontinua. Entonces se puede ver que  $\Delta = E_e - E_0$  crece para mayores profundidades acercándose asintóticamente

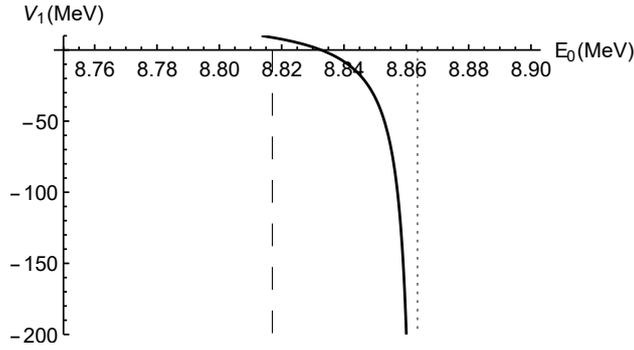


Figura 2.12: Profundidad del pozo  $V_1$  en función de la energía del estado cuasi-estacionario  $E_0$ . En línea de puntos se señala el valor asintótico  $E_0 = 8,8636 MeV$  y en línea discontinua la energía experimental  $E_e = 8,817 MeV$ .

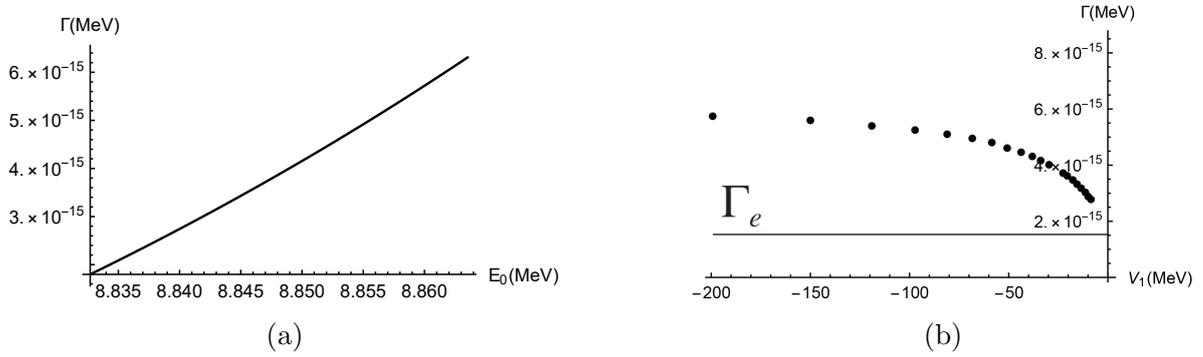


Figura 2.13: (a) Ancho de decaimiento  $\Gamma$  en función de la energía del estado cuasi-estacionario  $E_0$ . Se observa que para cualquier  $E_0$ ,  $\Gamma$  estará en el orden de magnitud observado experimentalmente. (b) Ancho de decaimiento  $\Gamma$  para un rango de profundidades  $V_1$ . En línea continua se señala el valor experimental  $\Gamma_e$ .

al valor  $\Delta_\infty = -0,0466 MeV$ , y en general para cualquier valor de  $V_1$  se encontrará en el intervalo  $[-0,0157; -0,0466) MeV$ .

Nos interesa ver si es posible reproducir el ancho de decaimiento experimental  $\Gamma_e = 1,53 \cdot 10^{-15} MeV$ . Podemos estudiar  $\Gamma$  como función de  $E_0$  y  $V_1$  a partir de eq.(2.35b). Se encuentra que para todo  $E_0$ ,  $\Gamma$  tiene un valor que se halla en el orden de magnitud experimental de  $10^{-15} MeV$  [ver Fig.(2.13a)]. Sin embargo, el valor exacto experimental  $\Gamma_e$  se reproduce para  $E_0 \approx 8,8305 MeV$ , lo cual aplicado a la ecuación (2.38) nos da como resultado  $V_1 = 1,72 MeV$  el cual es un valor positivo y por lo tanto invalido dado que  $V_1 < 0$  es una condición. La imposibilidad de reproducir los valores experimentales a la perfección se puede atribuir a una limitación del modelo. En la Figura (2.13b) se muestra  $\Gamma$  para un rango de valores de  $V_1$  y se marca con una línea horizontal el valor experimental  $\Gamma_e$ . Se presenta un comportamiento asintótico para altas profundidades; precisamente,  $\Gamma \rightarrow 6,32 \cdot 10^{-15} MeV$  cuando  $V_1 \rightarrow -\infty$ .

# Capítulo 3

## Conclusiones

En el Capítulo 1 se estudian los polos de la solución del oscilador armónico amortiguado en función del valor de la constante de amortiguamiento  $\gamma$ . Se ve que para  $\gamma \rightarrow 0$  (amortiguamiento débil) se encuentran dos polos aislados de orden 1 bien determinados y separados entre sí, y en sus posiciones se observa la variación del argumento de la función en una cantidad  $\pi$ . Para  $\gamma \rightarrow \omega_0$  (amortiguamiento fuerte) la posición de los polos tienden a unirse formando un único polo de orden 2, y la variación total del argumento en este polo es en una cantidad  $2\pi$ . En un caso transitorio con  $0 < \gamma < \omega_0$ , las curvas al rededor de cada polo perderán su simetría cuando mayor sea el valor de  $\gamma$ , además de observarse el desplazamiento de ambos.

En el Capítulo 2 se introdujo el método dos potenciales en el límite cuasi-clásico para el problema del decaimiento alfa y, con el objetivo de calcular el ancho de decaimiento  $\Gamma$  del  $^{212}\text{Po}$  (cuyo valor experimental es  $\Gamma_e = 1,53 \cdot 10^{-15} \text{MeV}$ ), se lo aplicó a tres casos de interés: un pozo de potencial constante a trozos, un potencial conformado por la suma de un potencial de Woods-Saxon y un potencial de Coulomb, y el potencial del modelo estándar de decaimiento alfa (Coulombiano).

- En el caso del potencial constante a trozos los resultados para el ancho de decaimiento  $\Gamma$  son lejanos al valor experimental, del orden de  $\cdot 10^{-26} \text{MeV}$ . Se concluye que este modelo de potencial es una aproximación demasiado fuerte y poco satisfactoria.
- Para el caso del potencial de Woods-Saxon más Coulombiano se obtiene resultados mucho más cercanos a los experimentales. Para pozos de potencial razonables, todos los cálculos de  $\Gamma$  se hallan en el orden de los  $10^{-15} \text{MeV}$ .
- Para el modelo estándar de decaimiento alfa también se hallan resultados de  $\Gamma$  que se encuentran en el orden de magnitud experimental de  $10^{-15} \text{MeV}$ , independientemente de la profundidad del pozo de potencial. Además se observa que los valores calculados presentan un comportamiento asintótico para profundidades del pozo de potencial que tienden a  $-\infty$ . Por otro lado, se encuentra que en este caso es imposible reproducir con exactitud los valores experimentales, lo cual se atribuye a limitaciones en el modelo.

# Capítulo 4

## Anexo

En esta capítulo se encuentran algunos de los códigos utilizados en los cálculos. Todos están escritos para utilizar en Wolfram Mathematica 11.0.

### 4.1. Función G

El siguiente código es una herramienta útil para estudiar la función  $G$  normalizada y su argumento como funciones de  $\omega$ , y ver la evolución continua de las curvas en función de  $\gamma$ .

```
1 a[x_, y_] := (x^2 - y^2)^(1/2) - I*y
2 b[x_, y_] := -(x^2 - y^2)^(1/2) - I*y
3 G[x_, t_] := - 1/((x - a[1, t])*(x - b[1, t]))
4 Manipulate[
5   Plot[{ Abs[G[x, t]/G[1, t]]^2, Arg[G[x, t]] + Pi} , {x, -5, 5},
6   PlotLegends -> "Expressions", {t, 0.1, 0.9}]
```

### 4.2. Potencial de Woods-Saxon más Coulombiano, Gráfico interactivo

En el siguiente link se encuentra un gráfico interactivo del potencial de Woods-Saxon más el potencial de Coulomb definido en la Sección (2.2.2), <https://www.desmos.com/calculator/wgbfyy3ygs>

### 4.3. Ancho de decaimiento $\Gamma$

El siguiente código sirve para calcular el ancho de decaimiento  $\Gamma$  dados  $V_0$  y  $E_0$ . En el código,  $V_0$  está representado por  $w_0$ .

```
1 c := 0.188
2 r0 := 0
3 r1 := r /. FindRoot[e0 - w[r] - zc*e2/r, {r, 6, 10}]
4 r2 := r /. FindRoot[e0 - w[r] - zc*e2/r, {r, 10, 50}]
5 a := 0.65
6 zc := 84
7 e2 := 1.44 (**e^2**)
8 e0 := - (** Energia de estado cuasi-estacionario; E_0 **)
9 rc := 7.12
10 w0 := - (**Peso del potencial de Woods-Saxon; w0 es V_0**)
```

```

11
12 w[r_] := -w0/(1 + Exp[(r - rc)/a])
13
14 rho[r_] :=
15 Piecewise[{{Sqrt[c*(e0 - w[r] - zc*e2*(3 - r^2/(rc^2)))/(2*rc))],
16   r < rc}, {Sqrt[c*(e0 - w[r] - zc*e2/r)], r > rc}}]
17
18 i[r_?NumericQ] := NIntegrate[rho[x], {x, r0, r}]
19
20 n := 1/NIntegrate[(Cos[i[r] - Pi/4])^2/rho[r], {r, r0, r1}] (** cte. de
   normalizacion N **)
21
22 gamma := n*Exp[-2*NIntegrate[Abs[rho[r]], {r, r1, r2}]]/(2*c)
23 gamma

```

## 4.4. Soluciones para pozos de potencial cuadrados

Dado un valor de  $E_0$ , el siguiente código sirve para calcular  $V_0$  para los pozos de potencial asociados al estado ligado. En el código,  $V_0$  está representado por  $w_0$ .

```

1 c := 0.188
2 a := 0.65
3 zc := 84
4 e2 := 1.44 (**e^2**)
5 e0 := - (** Energia de estado cuasi-estacionario; E_0 **)
6 rc := 7.12
7
8 w[w0_, r_] := -w0/(1 + Exp[(r - rc)/a]) (**Potencial de Woods-Saxon**)
9
10 vc[r_] :=
11 Piecewise[{{0, r < 0}, {zc*e2*(3 - r^2/(rc^2))/(2*rc),
12   r < rc}, {zc*e2/r, r > rc}}] (**Potencial de Coulomb**)
13
14 v[w0_, r_] := w[w0, r] + vc[r]
15
16 h[w0_, r_] :=
17 Exp[(r - rc)/a]*(Exp[(r - rc)/a] + 1)^(-2)*w0/a - zc*e2/(r^2)
18 m[w0_] := r /. FindRoot[h[w0, r] == 0, {r, 10}]
19
20 e[w0_] := e0 - FindMaxValue[v[w0, r], {r, 8}]
21
22 v0[w0_] := -FindMinValue[v[w0, r], {r, 0.1}] +
23   FindMaxValue[v[w0, r], {r, 8}]
24
25 f[w0_] := Abs[Sin[Sqrt[0.188*(e[w0] + v0[w0])]*m[w0]]]
26
27 g[w0_] := Sqrt[(e[w0] + v0[w0])/v0[w0]]
28
29 i[w0_] := Tan[Sqrt[0.188*(e[w0] + v0[w0])]*m[w0]]
30
31 Plot[{f[x], g[x], i[x]}, {x, -, -}]
32
33 FindRoot[f[x] - g[x] == 0, {x, -}]

```

La línea 31 sirve para visualizar en dónde se hallan las soluciones, las cuales son intersecciones de  $f$  y  $g$ , y verifican  $i(V_0) < 0$ . Luego se utiliza la línea 33 para hallar la solución precisa. Este cálculo toma en consideración que el máximo de la barrera, el ancho y la profundidad del pozo dependen de  $V_0$ , considerando luego un pozo cuadrado.

# Bibliografía

- [1] H. M. Nussenzveig. *Causality and dispersion relations*. Academic Press. 1972.
- [2] C. Tanoudji. *Quantum Mechanics. Vol I , Vol II*. 1973.
- [3] S. A. Gurvitz. *Physical Review A*, 34:1747, 1988.
- [4] <https://www.nndc.bnl.gov>.
- [5] T. Vertse, K. F. Pal, and Z. Balogh. *Computer Physics Communications*, 27:309–322, 1982.